JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS **80**, 33–46 (1988)

Remarques sur le principe d'incertitude

B. HELFFER

Département de Mathématiques, Université de Nantes, 44072 Nantes Cédex, et Centre de Mathématiques, de l'École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cédex, France

ET

J. NOURRIGAT

Département de Mathématiques, Université de Rennes I, 35042 Rennes Cédex, France

Communicated by Paul Malliavin

Received December 1986

INTRODUCTION

En mécanique quantique, on associe à une fonction réelle $a(x, \xi)$ sur R^{2n} (appelée aussi symbole ou observable) une famille d'opérateurs non bornés notés A_h ou $a^w(x, hD_x)$, dépendant d'un paramètre $h > 0$, et définis par la quantification de Weyl:

$$(a^w(x, hD_x)\psi)(x) = (2\Pi)^{-n} \int e^{i(x-y)\xi}\, a\left(\frac{x+y}{2}, h\xi\right) \psi(y)\, dy\, d\xi. \qquad (0.1)$$

Cette formule a un sens si ψ est dans $\mathfrak{S}(R^n)$ et si $a(x, \xi)$ est C^∞ et a un comportement polynomial à l'infini, ainsi que toutes ses dérivées (cf. Hörmander [Hö]). Au couple (a, ψ) tel que $\psi \not\equiv 0$, on associe l'espérance de l'observable $a(x, \xi)$ dans l'état ψ, qui dépend elle aussi de h et est donnée par:

$$E_h(a, \psi) = \frac{(a^w(x, hD_x)\,\psi, \psi)}{\|\psi\|^2} \qquad (0.2)$$

L'écart-type de l'observable $a(x, \xi)$ dand le même état ψ est

$$\Delta_h(a, \psi) = \frac{\|a^w(x, hD_x)\,\psi - E_h(a, \psi)\psi\|}{\|\psi\|} \qquad (0.3)$$

0022-1236/88 $3.00

Toutes les normes sont dans $L^2(R^n)$. On considère, dans toute la suite de l'article, un système d'observables $a_1(x, \xi), ..., a_p(x, \xi)$. L'incertitude totale dans la mesure des fonctions $a_j(x, \xi)$ dans l'état $\psi \not\equiv 0$ peut être définie par:

$$\Delta_h(\psi) = \left[\sum_{j=1}^{p} \Delta_h(a_j, \psi)^2 \right]^{1/2}. \tag{0.4}$$

Notons que l'on a

$$\Delta_h(\psi)^2 = \|\psi\|^{-2} \inf_{t \in R^p} \sum_{j=1}^{p} \|(a_j^w(x, hD_x) - t_j)\psi\|^2. \tag{0.5}$$

Dans le cas où $a_1(x, \xi) = x_1$ et $a_2(x, \xi) = \xi_1$, le principe d'incertitude de Heisenberg nous montre que $h \leqslant 2\Delta_h(a_1, \psi)\, \Delta_h(a_2, \psi)$ et, par conséquent:

$$\Delta_h(\psi) \geqslant h^{1/2} \qquad \forall \psi \in \mathfrak{S}(R^n) \setminus \{0\}. \tag{0.6}$$

On sait aussi qu'il y a égalité dans (0.6) lorsque $\psi(x) = \psi_h(x) = \exp(-|x|^2/h)$.

Par analogie avec (0.6), on peut se poser la question suivante:

PROBLÈME 1. Soit $\sigma \in]0, 1[$, fixé. A quelle condition existe-t-il des états ψ_{h_n} (où h_n est une suite tendant vers 0) pour lesquels l'incertitude totale $\Delta_h(\psi_{h_n})$ est un infiniment petit par rapport à h_n^σ lorsque $h_n \to 0$?

La propriété inverse équivaut à l'existence de constantes $C > 0$ et $h_0 > 0$ telles qu'on ait l'égalité suivante, généralisant (0.6):

$$\Delta_h(\psi) \geqslant Ch^\sigma \qquad \forall h \in]0, h_0], \forall \psi \in \mathfrak{S}(R^n) \setminus \{0\}. \tag{0.7}$$

Lorsque les dèrivées d'ordre $\geqslant 1$ des fonctions $a_j(x, \xi)$ sont bornées sur R^{2n}, nous allons apporter une réponse complète au problème 1. On abordera ensuite au §2 une situation plus générale. On peut supposer que $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$, car, pour $\sigma < \frac{1}{2}$, la réponse au problème 1 est toujours positive comme le montre l'exemple ci-dessus.

Si $I = (i_1, ..., i_m)$ est une suite d'entiers compris entre 1 et p, on désigne par $a_I(x, \xi)$ le crochet de Poisson itéré $a = (ad a_{i_1}) \cdots (ad a_{i_{m-1}}) a_{i_m}$, et l'on pose $|I| = m$. On note $(\mathrm{ad}\, f) g$ le crochet de Poisson $\{f, g\}$ de deux fonctions.

THÉORÈME 1. *On suppose que toutes les dérivées d'ordre* $\geqslant 1$ *des fonctions* $a_j(x, \xi)$ *sont bornées sur* R^{2n}. *Soit* $\sigma \in [\frac{1}{2}, 1[$. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

(a) *Il existe* $C>0$ *et* $h_0>0$ *tels que* (0.7) *soit vérifiée.*

(b) *Il existe* $C_1>0$ *tel qu'on ait:*

$$\sum_{2 \leqslant |I| \leqslant (1-\sigma)^{-1}} |a_I(x, \xi)| \geqslant C_1 \qquad \forall (x, \xi) \in R^{2n}. \tag{0.8}$$

La condition (b) est très proche de la condition de Hörmander sur les champs de vecteurs, et exprime la non-commutativité des opérateurs $a_j^w(x, hD_x)$. Le problème 1 admet donc une réponse positive si, et seulement si la condition (b) n'est pas vérifiée. Le cas extrême est le cas intégrable considéré par exemple dans la thèse de D. Zoma [Zo]. Nous allons démontrer l'implication (a) $\Rightarrow$ (b), puis nous démontrerons la réciproque dans une situation plus générale.

Pour simplifier l'écriture, nous omettrons la lettre w dans les formules analogues à (0.1).

1. Preuve de l'implication (a) $\Rightarrow$ (b)

On suppose que la propriété (b) n'est pas vérifiée. Pour tout $h \in]0, 1]$, on peut alors trouver $(x_h, \xi_h) \in R^{2n}$ tel que:

$$\sum_{2 \leqslant |I| \leqslant r} |a_I(x_h, \xi_h)| \leqslant h, \tag{1.1}$$

où r est le plus grand entier $\leqslant (1-\sigma)^{-1}$. Supposons, d'autre part, qu'il existe $C>0$ et $h_0>0$ tels que (0.7) soit vérifié. D'après (0.5), on en déduit que, pour tous $h \in]0, h_0]$, $t=(t_1, ..., t_p) \in R^p$ et $\psi \in \mathfrak{S}(R^n)$, on a:

$$h^{2\sigma} \|\psi\|^2 \leqslant C \sum_{j=1}^{p} \|(a_j(x, hD_x) - t_j)\, \psi\|^2. \tag{1.2}$$

En particulier, (1.2) est vérifié pour $t_j = a_j(x_h, \xi_h)$. Soit $\chi(x, \xi)$ une fonction réelle dans $C_0^\infty(R^{2n})$, égale à 1 dans un voisinage de 0. Posons

$$\chi_h(x, \xi) = \chi(x - x_h, h\xi - \xi_h)$$

et appliquons (1.2) avec $\psi = \chi_h(x, D) f$, où f est une fonction fixée dans $\mathfrak{S}(R^n)$. Posons:

$$X_0(x, \xi, h) = h^{\sigma - 1} \chi_h(x, \xi)$$

et, si $1 \leqslant j \leqslant p$

$$X_j(x, \xi, h) = h^{-1} \chi_h(x, \xi) [a_j(x, h\xi) - a_j(x_h, \xi_h)].$$

On peut écrire:

$$h^{-1}[a_j(x, hD_x) - a_j(x_h, \xi_h)]\, \chi_h(x, D) = X_j(x, D_x, h) + R_j(x, D_x, h)$$

où l'opérateur $R_j(x, D_x, h)$ est borné dans $L^2(R^n)$, indépendemment de h. On déduit donc de (1.2) l'inégalité suivante:

$$\|X_0(x, D_x, h) f\|^2 \leqslant C \sum_{j=1}^{p} \|X_j(x, D_x, h) f\|^2 + C\, \|f\|^2 \tag{1.3}$$

pour tous $f \in \mathfrak{S}(R^n)$ et $h \leqslant h_0$. Pour tout multi-indice (α, β), il existe $C_{\alpha\beta} > 0$ tel que l'on ait

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta X_j(x, \xi, h)| \leqslant C_{\alpha\beta} h^{-1+|\beta|} \qquad \forall (x, \xi) \in R^{2n}, \forall h \leqslant h_0$$

pour $j = 0, 1, ..., p$. Soit $\mathfrak{G}$ l'algèbre nilpotente libre à $p+1$ générateurs $Y_0, Y_1, ..., Y_p$, de rang de nilpotence $r+1$. Soit l la forme linéaire sur $\mathfrak{G}$ telle que

$$l(Y_0) = 1 \qquad \text{et} \qquad l(Y_j) = 0 \qquad \text{si } 1 \leqslant j \leqslant p \tag{1.4}$$

et telle que l s'annule sur les crochets de longueur $\geqslant 2$. On voit que:

$$l(Y_j) = \lim_{h \to 0} h^{(1-\sigma)} X_j(x_h, \xi_h/h, h) \qquad (0 \leqslant j \leqslant p).$$

De même, si Y_I est un crochet itéré des générateurs de l'algèbre, de longueur $|I|$ comprise entre 2 et $r+1$, et si $X_I(x, \xi, h)$ désigne le crochet de Poisson correspondant des fonctions $X_j(x, \xi, h)$ $(0 \leqslant j \leqslant p)$, on voit que:

$$\lim_{h \to 0} h^{|I|(1-\sigma)} X_I(x_h, \xi_h/h, h) = 0 = l(Y_I). \tag{1.5}$$

En effet, si $|I| \leqslant r$, cela résulte de (1.1), et si $|I| = r+1$, cela provient du fait que $|X_I(x, \xi, h)| \leqslant Ch^{-1}$ et que $(r+1)(1-\sigma) > 1$ puisque r est le plus grand entier $\leqslant (1-\sigma)^{-1}$.

Par conséquent, la forme linéaire l est dans l'ensemble Γ_{r+1} défini dans [No].

Puisque l s'annule sur les crochets de longueur $\geqslant 2$, on sait que la représentation unitaire irréductible Π_l associée, selon la théorie de Kirillov, à la forme linéaire l, est scalaire, et que $\Pi_l(Y_j) = il(Y_j)$ $(0 \leqslant j \leqslant p)$. Puisque l est dans Γ_{r+1}, on sait d'après [No] que l'inégalité (1.3) entraîne:

$$|l(Y_0)|^2 \leqslant C \sum_{j=1}^{p} |l(Y_j)|^2.$$

Comme la contradiction avec (1.4) est évidente, l'implication (a) $\Rightarrow$ (b) est démontrée.

2. Généralisations

On va généraliser le problème 1 ou l'inégalité (0.7) de deux manières.

(1) On peut poser le problème 1 en ne considérant que des états ψ_h dans un certain sous-ensemble Σ_h de $\mathfrak{S}(R^n)$. Dans la suite, on considère une partie fermée K de R^p et, pour tout $h \in]0, 1]$, on pose:

$$\sum_h = \{\psi \in \mathfrak{S}(R^n) \backslash \{0\}, (E_h(a_1, \psi), ..., E_h(a_p, \psi)) \in K\}.$$

(2) On ne suppose plus que les dérivées d'ordre $\geqslant 1$ des fonctions a_j sont bornées, et l'on remplace cette hypothèse par les trois autres ci-dessous. On pose, pour tous $(x, \xi) \in R^{2n}$ et $\mu \in K$:

$$m_0(x, \xi, \mu) = \left(\sum_{j=1}^{p} |a_j(x, \xi) - \mu_j|^2 \right)^{1/2} \qquad \text{et} \qquad m(x, \xi, \mu) = 1 + m_0(x, \xi, \mu) \tag{2.2}$$

On fait les hypothèses suivantes:

(H1) Pour tout multi-indice (α, β) non nul, il existe $C_{\alpha\beta} > 0$ tel que:

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_j(x, \xi)| \leqslant C_{\alpha\beta} \inf_{\mu \in K} m(x, \xi, \mu) \qquad \forall (x, \xi) \in R^{2n}.$$

(H2) Il existe un entier q tel que les dérivées d'ordre $\geqslant q$ des fonctions a_j sont bornées dans R^{2n}.

(H3) Il existe un entier $r \geqslant 2$ tel qu'on ait:

$$m_0(x, \xi, \mu)^2 + \sum_{2 \leqslant |I| \leqslant r} |a_I(x, \xi)|^2 \geqslant 1 \tag{2.3}$$

pour tous $(x, \xi) \in R^{2n}$ et $\mu \in K$.

Théorème 2. *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe $C > 0$ et $h_0 > 0$ tels qu'on ait:*

$$\Delta_h(\psi) \geqslant C h^{1-(1/r)} \qquad \textit{pour tout } h \in]0, h_0] \textit{ et pour tout } \psi \in \Sigma_h. \tag{2.4}$$

Le théorème 2 contient comme cas particulier l'implication (b) $\Rightarrow$ (a) du théorème 1, avec $K = R^p$. Comme autre exemple, citons le cas où K est un compact, et où les $a_j(x, \xi)$ et leurs dérivées sont majorées à l'infini par des polynômes en (x, ξ) de degré q, avec l'inégalité suivante pour $|x| + |\xi|$ assez grand:

$$\sum_{j=1}^{p} |a_j(x, \xi)| \geqslant C(|x| + |\xi|)^q.$$

Remarque. Lorsqu'on considère une famille d'états (ψ_h) l'appartenance de ψ_h à Σ_h résulte souvent de propriétés de l'ensemble de fréquence de ψ_h, introduit chez Guillemin et Sternberg [GuSt] (cf. également [Cha], [Ro]), encore qu'il y ait quelques problèmes de contrôle à l'infini. Supposons, par exemple, que ψ_h soit une fonction propre d'un opérateur pseudodifférentiel $p(x, D_x, h)$, et que la valeur propre correspondante, notée $\lambda(h)$, ait une limite λ_0 quand $h \to 0$.

$$p(x, hD_x, h)\, \psi_h = \lambda(h)\, \psi_h$$
$$\lambda(h) \to \lambda_0.$$

Supposons aussi que $p(x, \xi, h)$ soit un polynôme en h

$$p(x, \xi, h) = \sum_{j=0}^{m} h^j p_j(x, \xi)$$

et que, pour (x, ξ) assez grand, on ait $p_0(x, \xi) \geqslant C(|x| + |\xi|)^\varepsilon$, avec $C > 0$ et $\varepsilon > 0$.

Désignons alors par K un voisinage compact arbitrairement petit de l'enveloppe convexe de l'ensemble K_0 suivant:

$$K_0 = \{t = (t_1, ..., t_p) \in R^p, \exists (x, \xi) \in R^{2n}, a_j(x, \xi) = t_j (1 \leqslant j \leqslant p), \text{ et } p_0(x, \xi) = \lambda_0\}.$$

Sous certaines hypothèses supplémentaires sur p, on montre que, pour h assez petit, ψ_h est bien dans l'ensemble Σ_h défini en (2.1). Il suffit, par exemple, qu'il existe $\rho > 0$, et, pour tout multi-indice (α, β), qu'il existe $C_{\alpha\beta} > 0$ tel qu'on ait:

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p_j(x, \xi)| \leqslant C_{\alpha\beta}(1 + |p_0(x, \xi)|)(1 + |x| + |\xi|)^{-\rho(j + |\alpha + \beta|)}.$$

On trouvera une étude de cette situation dans [HeRo 1], [HeRo 2] et dans [Ro].

L'existence d'une incertitude minimale $\Delta_h(\psi_h)$ dans un état ψ_h peut aussi résulter du fait que ψ_h est une fonction propre d'un opérateur $a_I(x, h D_x)$ dont le symbole est un crochet de Poisson itéré des $a_j(x, \xi)$, la valeur propre étant assez grande:

THÉORÈME 3. *On suppose que les dérivées d'ordre $\geqslant 1$ des fonctions a_j sont bornées. Soit $a_I(x, \xi)$ un crochet Poisson itéré des symboles $a_j(x, \xi)$, de longueur $|I| \geqslant 2$. Soit θ un réel tel que $0 < \theta < |I|(1 + |I|)^{-1}$. Pour tout $h \in]0, 1]$, soient ψ_h une fonction propre de l'opérateur $a_I(x, hD_x)$, et $\lambda(h)$ la valeur propre correspondante. Alors il existe des constantes $C > 0$ et $C' > 0$,* *ne dépendant que des fonctions a_j mais non de h ni de ψ_h, telles qu'on ait, pour h assez petit*:

$$\Delta_h(\psi_h) \geqslant C\lambda(h)^{1/|I|}\, h^{1-1/|I|} - C'h^{\theta}.$$

Le reste de l'article est consacré à la preuve du théorème 2. Celle du théorème 3 est très voisine et nous ne la détaillerons pas.

3. Une inégalité

Nous allons traduire dans le cadre pseudo-différentiel admissible (c'est-à-dire dépendant du paramètre $h \in]0, 1]$ un résultat de [BCN, FP]).

Si X est un opérateur antiautoadjoint dans $L^2(R^n)$ et α un réel dans $]0, 2[$, on note $D_\alpha(X)$ l'espace des $f \in L^2(R^n)$ tels que:

$$\|f\|^2_{D_\alpha(X)} = \int_0^\infty \|(e^{tX} - I)^2 f\|^2 \frac{dt}{t^{2\alpha+1}} < \infty.$$

Rappelons que, si $0 < \alpha < 1$, $D_\alpha(X)$ est un espace d'interpolation entre $D_1(X)$ et $L^2(R^n)$, et que $D_1(X)$ est le domaine de X, sa norme étant équivalente à celle du graphe

$$\|f\|_{D_1(X)} \approx \|Xf\| + \|f\|.$$

Soient $b_j(x, \xi)$ $(1 \leqslant j \leqslant p)$ des fonctions réelles, C^∞ sur R^{2n}, bornées ainsi que toutes leurs dérivées. Pour tout $h \in]0, 1]$, soit $B_j(h)$ l'opérateur $(i/h)\, b_j(x, hD_x)$, et soit $Y(h)$ une extension antiautoadjointe d'un commutateur itéré des opérateurs $B_j(h)$. Soient m la longueur du crochet correspondant, et σ un réel tel que $\sigma > (m+1)^{-1}$. La proposition suivante résulte de [BCN]:

Proposition 4. *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe $C > 0$ et $h_0 > 0$ tels qu'on ait*:

$$\|f\|^2_{D_{Y_m}(Y(h))} \leqslant C \sum_{j=1}^{p} \|B_j(h) f\|^2 + Ch^{-2\sigma} \|f\|^2 \tag{3.1}$$

Pour tous $f \in \mathfrak{S}(R^n)$ et $h \in]0, h_0]$. Si les symboles $b_j(x, \xi)$ dépendent de divers paramètres, mais sont bornés sur R^{2n} ainsi que toutes leurs dérivées indépendamment de ces paramètres, il en est de même de la constante C dans (3.1).

4. Preuve du théorème 2

Les hypothèses (H1) et (H2) entraînent l'existence de $C > 0$ tel qu'on ait:

$$m(y, \eta, \mu) \leqslant C m(x, \xi, \mu)(1 + |y - x| + |\eta - \xi|)^q \tag{4.1}$$

pour tous (x, ξ) et $(y, \eta) \in R^{2n}$, et $\mu \in K$. D'après l'hypothèse (H1), il existe $C > 0$ tel qu'on ait

$$|\partial_x a_I(x, \xi)| + |\partial_\xi a_I(x, \xi)| \leqslant C \inf_{\mu \in K} m(x, \xi, \mu)^{|I|}$$

si $(x, \xi) \in R^{2n}$ et $|I| \leqslant r$. Par conséquent, il existe $a > 0$, tel que, pour tous (x, ξ) et (y, η) dans R^{2n} et pour tout $\mu \in K$, les inégalités ci-dessous:

$$m_0(x, \xi, \mu) \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad |y - x|^2 + |\eta - \xi|^2 \leqslant a^2 \tag{4.2}$$

entraînent les suivantes

$$|m_0(y, \eta, \mu) - m_0(x, \xi, \mu)| \leqslant \tfrac{1}{4} \tag{4.3}$$

$$|a_I(y, \eta) - a_I(x, \xi)| \leqslant 1/4N \qquad (|I| \leqslant r) \tag{4.4}$$

où N est le nombre de crochets a_I tels que $|I| \leqslant r$.

On peut trouver (cf. Hörmander [Hö]) des suites de fonctions réelles ϕ_ν, θ_ν et ψ_ν $(\nu \in N)$ dans $C_0^\infty(R^{2n})$ ayant les propriétés suivantes:

(1) $\phi_\nu = 1$ sur le support de θ_ν, et $\theta_\nu = 1$ sur le support de ψ_ν.

(2) Pour tout multi-indice (α, β), il existe $C_{\alpha\beta} > 0$ tel qu'on ait:

$$\sum_{\nu \in N} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \psi_\nu(x, \xi)|^2 \leqslant C_{\alpha\beta} \qquad \forall (x, \xi) \in R^{2n} \tag{4.5}$$

et de même pour les fonctions θ_ν et ϕ_ν.

(3) On a, pour tout $(x, \xi) \in R^{2n}$

$$\sum_{\nu \in N} \psi_\nu(x, \xi)^2 = 1. \tag{4.6}$$

(4) Le diamètre du support de ϕ_ν est $\leqslant a$, où a est la constante qui apparaît dans (4.2), (4.3) et (4.4).

Pout tout $h > 0$, soit g_h la forme quadratique suivante sur R^{2n}

$$g_h(y, \eta) = |y|^2 + h^2 |\eta|^2.$$

Si H_1 et H_2 sont deux espaces de Hilbert, et si $\mu_h(x, \xi)$ est une fonction strictement positive sur R^{2n}, pouvant dépendre du paramètre $h \in]0, 1]$, on note, suivant [Hö], $S(\mu_h, g_h, H_1, H_2)$ l'ensemble des familles $a_h(h \in]0, 1[)$ de fonctions C^∞ sur R^{2n}, à valeurs dans l'espace $\mathfrak{L}(H_1, H_2)$ des applications linéaires continues de H_1 dans H_2, telles que, pour tout multi-indice (α, β), il existe $C_{\alpha\beta} > 0$ tel que:

$$\|\partial_x^\alpha \, \partial_\xi^\beta a_h(x, \xi)\|_{\mathfrak{L}(H_1, H_2)} \leqslant C_{\alpha\beta} \mu_h(x, \xi) \, h^{|\beta|} \tag{4.7}$$

pour tous $h \in]0, 1]$ et $(x, \xi) \in R^{2n}$.

L'inégalité (4.1) entraîne que la fonction suivante

$$m_{h,\mu}(x, \xi) = m(x, h\xi, \mu), \qquad h \in]0, 1], \mu \in K \tag{4.8}$$

est, selon la terminologie de [Hö], $\sigma \cdot g_h$-tempérée, et les constantes dans les inégalités qui expriment cette propriété sont indépendantes de $h \in]0, 1]$ et $\mu \in K$. On peut donc appliquer aux classes $S(m_{h,\mu}^\alpha, g_h, H_1, H_2)$ $(\alpha \in R)$ les résultats usuels du calcul pseudo-différentiel. Par exemple, si a_h $(h \in]0, 1])$ est une famille dans $S(1, g_h, H_1, H_2)$, l'opérateur, $a(x, D_x)$ est borné de $L^2(R^n, H_1)$ dans $L^2(R^n, H_2)$, avec une norme bornée indépendemment de $h \in]0, 1]$.

En particulier, la suite de fonctions $\psi_\nu(x, h\xi)$ $(\nu \in N)$ définie ci-dessus peut être considérée comme un symbole dans $S(1, g_h, \mathbb{C}, l^2)$, où l^2 est l'espace de Hilbert des suites de carré sommable. On déduit de (4.6) l'égalité suivante:

$$\sum_{\nu \in N} \phi_\nu(x, hD_x)^* \, \psi_\nu(x, hD_x) = I + hR(x, D_x, h)$$

où $R(x, \xi, h)$ est dans $S(1, g_h, \mathbb{C}, \mathbb{C})$. Par conséquent, on peut écrire:

$$\sum_{\nu \in N} \|\psi_\nu(x, hD_x) f\|^2 = (1 + O(h)) \, \|f\|^2. \tag{4.9}$$

Pour tout $\nu \in N$, on choisit un point arbitraire dans le support de ψ_ν, et on le note (x_ν, ξ_ν). Pour tout $\mu \in K$, soit $E_0(\mu)$ l'ensemble des indices $\nu \in N$ tels qu'on ait:

$$m_0(x_\nu, \xi_\nu, \mu) \geqslant \tfrac{1}{2}.$$

PROPOSITION 5. *Il existe $C > 0$ tel qu'on ait*:

$$\sum_{\nu \in E_0(\mu)} \|\psi_\nu(x, hD_x) f\|^2 \leqslant C \sum_{j=1}^{p} \|(a_j(x, hD_x) - \mu_j) f\|^2 + Ch^2 \, \|f\|^2 \tag{4.10}$$

pour tous $f \in \mathfrak{S}(R^n)$, $h \in]0, 1]$ et $\mu \in K$.

Démonstration. On pose:

$$\tilde{\psi}_\nu(x, \xi) = \psi_\nu(x, \xi) \qquad \text{si } \nu \in E_0(\mu) \text{ et } \tilde{\psi}_\nu(x, \xi) = 0 \text{ sinon}$$

et, de même:

$$p_{j,\nu}(x, \xi, \mu) = \begin{cases} \psi_\nu(x, \xi) \dfrac{a_j(x, \xi) - \mu_j}{m_0(x, \xi, \mu)^2} & \text{si } \nu \in E_0(\mu) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut écrire:

$$\tilde{\psi}_\nu(x, \xi) = \sum_{j=1}^{p} p_{j,\nu}(x, \xi, \mu)(a_j(x, \xi) - \mu_j). \tag{4.11}$$

D'après (4.3), on a $m_0(x, \xi, \mu) \geqslant \frac{1}{4}$ dans le support de ψ_ν et, par conséquent, la famille de suites de fonctions $p_{j\nu}(x, h\xi, \mu)$ $(h \in]0, 1], \nu \in N)$ est dans la classe $S(m_{h,\mu}^{-1}, g_h, \mathbb{C}, l^2)$ définie ci-dessus. L'hypothèse (H1) entraîne que la famille de fonctions $(a_j(x, h\xi) - \mu_j)$ $(h \in]0, 1])$ est dans $S(m_{h,\mu}, g_h, \mathbb{C}, \mathbb{C})$. Toutes les semi-normes $C_{\alpha\beta}$, dans les inégalités analogues à (4.7) qui définissent ces classes, sont indépendantes de $\mu \in K$. Par conséquent, on déduit de (4.11) l'égalité suivante:

$$\tilde{\psi}_\nu(x, hD_x) = \sum_{j=1}^{p} p_{j\nu}(x, hD_x, \mu)(a_j(x, hD_x) - \mu_j) + hR_\nu(x, D_x, h, \mu)$$

où la suite R_ν est dans $S(1, g_h, \mathbb{C}, l^2)$, d'où l'on déduit

$$\sum_{\nu \in N} \|R_\nu(x, D_x, h, \mu) f\|^2 \leqslant C \|f\|^2$$

avec C indépendant de h, μ et f. On a aussi (avec un autre $C > 0$):

$$\sum_{\nu \in N} \|p_{j\nu}(x, hD_x, \mu)\, g\|^2 \leqslant C \|g\|^2 \qquad \forall g \in \mathfrak{S}(R^n).$$

La proposition 5 se déduit facilement des trois points ci-dessus.

Pour tout I tel que $2 \leqslant |I| \leqslant r$, et pour tout $\mu \in K$, soit $E_I(\mu)$ l'ensemble des indices $\nu \in N$ tels qu'on ait:

$$m_0(x_\nu, \xi_\nu, \mu) \leqslant \tfrac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad |a_I(x_\nu, \xi_\nu)| \geqslant 1/2N \tag{4.12}$$

où N est le nombre de crochets a tels que $|I| \leqslant r$. D'après l'hypothèse (H3), on voit que:

$$\mathbb{N} = \bigcup_{2 \leqslant |I| \leqslant r} E_I(\mu) \cup E_0(\mu). \tag{4.13}$$

Pour tout $\nu \in E_I(\mu)$, posons:

$$b_j(x, \xi, \mu, \nu) = \phi_\nu(x, \xi)[a_j(x, \xi) - \mu_j]. \tag{4.14}$$

Soit $B_j(\mu, \nu, h)$ l'opérateur $(i/h)\, b_j(x, hD_x, \mu, \nu)$. Soit σ_I un réel tel que:

$$\frac{1}{1+|I|} < \sigma_I < \frac{1}{|I|}. \tag{4.15}$$

PROPOSITION 6. *Il existe $C > 0$ et $h_0 > 0$ tels que l'on ait*:

$$h^{-2/|I|}\, \|\theta_\nu(x, hD_x) f\|^2 \leqslant C \sum_{j=1}^{p} \|B_j(\mu, \nu, h) f\|^2 + Ch^{-2\sigma_I} \|f\|^2 \tag{4.16}$$

pour tous $h \in]0, h_0]$, $f \in \mathfrak{S}(R^n)$, $\nu \in E_I(\mu)$, et $\mu \in K$.

Démonstration. D'après (4.3) et (4.12), on a $m_0(x, \xi, \mu) \leqslant 1$ dans le support de ϕ_ν. Par conséquent, d'après (H1), pour tout multi-indice (α, β), il existe $C_{\alpha\beta} > 0$, indépendant de μ et $\nu \in E_I(\mu)$ tel qu'on ait:

$$|\partial_x^\alpha\, \partial_\xi^\beta b_j(x, \xi, \mu, \nu)| \leqslant C_{\alpha\beta} \qquad \forall (x, \xi) \in R^{2n}.$$

Soit $b_I(x, \xi, \mu, \nu)$ le crochet de Poisson des fonctions $b_j(x, \xi, \mu, \nu)$ qui correspond à l'indice I, et soit $Y_I(x, \xi, \mu, \nu, h)$ le symbole du commutateur itéré $Y_I(\mu, \nu, h)$ des opérateurs $B_j(\mu, \nu, h)$ qui correspond à ce même indice. On a, d'après le calcul pseudo-différentiel:

$$|Y_I(x, \xi, \mu, \nu, h) + (i/h)\, b_I(x, h\xi, \mu, \nu)| \leqslant C$$

où C est indépendant de tous les paramètres. Dans le support de θ_ν, on a:

$$b_I(x, \xi, \mu, \nu) = a_I(x, \xi)$$

donc, d'après (4.4) et (4.12)

$$|b_I(x, \xi, \mu, \nu)| \geqslant 1/4N.$$

Par conséquent, dans le support de $\theta_\nu(x, h)$, on a:

$$|Y_I(x, \xi, \mu, \nu, h)| \geqslant (1/4Nh - C) \geqslant 1/8Nh$$

si h est assez petit. On en déduit l'estimation elliptique:

$$h^{-2}\, \|\theta_\nu(x, hD_x) f\|^2 \leqslant C\, \|Y_I(\mu, \nu, h) f\|^2 + C\, \|f\|^2 = C\, \|f\|^2_{D_1(Y_I)}.$$

D'autre part, on a:

$$\|\theta_\nu(x, hD_x) f\|^2 \leqslant C\, \|f\|^2.$$

Par interpolation, on en déduit que:

$$h^{-2/|I|}\ \|\theta_\nu(x, hD_x) f\|^2 \leqslant C\ \|f\|^2_{D_{1/|I|}(Y_I)}.$$

Les hypothèses de la proposition 3.1 étant vérifiée, on peut majorer le membre de droite grâce à (3.1), ce qui démontre la proposition 6.

PROPOSITION 7. *Si I est un indice tel que $2 \leqslant |I| \leqslant r$, il existe $C > 0$ et $h_0 \in]0, 1]$ tel qu'on ait*:

$$h^{-2/|I|} \sum_{\nu \in E_I(\mu)} \|\psi_\nu(x, hD_x) f\|^2 \leqslant Ch^{-2} \sum_{j=1}^{p} \|(a_j(x, hD_x) - \mu_j) f\|^2 + C\ \|f\|^2 \tag{4.17}$$

pour tous $h \in]0, h_0]$, $f \in \mathfrak{S}(R^n)$ et $\mu \in K$.

Démonstration. Pour tout $\nu \in E_I(\mu)$, on applique l'inégalité (4.16) en remplaçant f par $g = \psi_\nu(x, hD_x) f$, puis on ajoute les inégalités obtenues. Nous allons démontrer les deux inégalités suivantes:

$$\sum_{\nu \in N} \|(1 - \theta_\nu(x, hD_x))\, \psi_\nu(x, hD_x) f\|^2 \leqslant Ch^2\ \|f\|^2 \tag{4.18}$$

$$\sum_{\nu \in E_I(\mu)} \|B_j(\mu, \nu, h)\, \psi_\nu(x, hD_x) f\|^2 \leqslant Ch^{-2}\ \|(a_j(x, hD_x) - \mu_j) f\|^2 + C\ \|f\|^2 \tag{4.19}$$

où C est indépendant de h, f et μ. La proposition 7 s'en déduira facilement, car le dernier terme avec $h^{-2\sigma_I}$ en facteur peut disparaître pour h assez petit, puisque $\sigma_I < 1/|I|$.

Preuve de 4.18. La suite de fonctions $\psi_\nu(x, h\xi)$ est dans $S(1, \mathbb{C}, l^2)$, la suite $1 - \theta_\nu(x, h\xi)$ est dans $S(1, g, l^2, l^2)$, et les produits de ces fonctions sont nuls. On en déduit que:

$$(1 - \theta_\nu(x, hD_x))\, \psi_\nu(x, hD_x) = hR_\nu(x, D_x, h)$$

où $R_\nu(x, \xi, h)$ $(\nu \in N)$ est dans $S(1, g_h, \mathbb{C}, l^2)$, d'où l'on déduit (4.18).

Preuve de (4.19). On définit des suites de fonctions:

$$\tilde{\psi}_\nu(x, \xi) = \psi_\nu(x, \xi) \qquad \text{si } \nu \in E_I(\mu), \text{ et } \tilde{\psi}_\nu(x, \xi) = 0 \text{ sinon}$$

et de même pour $\tilde{\phi}_\nu(x, \xi)$. Posons aussi:

$$\begin{aligned} \tilde{b}_j(x, \xi, \mu, \nu) &= \tilde{\phi}_\nu(x, \xi)(a_j(x, \xi) - \mu_j) \\ c_j(x, \xi, \mu, \nu) &= \tilde{\psi}_\nu(x, \xi)(a_j(x, \xi) - \mu_j). \end{aligned} \tag{4.20}$$

On a, puisque $\phi_\nu = 1$ sur le support de ψ_ν:

$$c_j(x, h\xi, \mu, \nu) = \tilde{b}_j(x, h\xi, \mu, \nu)\, \psi_\nu(x, h\xi). \tag{4.21}$$

On remarque que la suite de fonctions $\tilde{\psi}_\nu(x, h)$ est dans $S(m_{h,\mu}^{-1}, g_h, \mathbb{C}, l^2)$ et que la suite $b_j(x, h\xi, \mu, \nu)$ est dans $S(1, g_h, \mathbb{C}, l^2)$. On déduit donc de (4.20) et (4.21) les égalités suivantes:

$$\psi_\nu(x, hD_x)(a_j(x, hD_x) - \mu_j) = c_j(x, hD_x, \mu, \nu) + hR_j(x, D_x, h, \mu, \nu)$$
$$\tilde{b}_j(x, hD_x, \mu, \nu)\, \psi_\nu(x, hD_x) = c_j(x, hD_x, \mu, \nu) + hR'_j(x, D_x, h, \mu, \nu)$$

où les suites R_j et $R'_j(x, \xi, \mu, \nu)$ $(\nu \in N)$ sont dans $S(1, g_h, \mathbb{C}, l^2)$. On en déduit que:

$$\sum_{\nu \in E_I(\mu)} \|\psi_\nu(x, hD_x)(a_j(x, hD_x) - \mu_j) f - h_j(x, hD_x, \mu, \nu)\, \psi_\nu(x, hD_x) f\|^2 \leqslant Ch^2 \|f\|^2$$

et l'inégalité (4.19) s'en déduit facilement.

Fin de la démonstration du théorème 2. D'après (4.9) et (4.13), on peut écrire, si h est assez petit:

$$\|f\|^2 \leqslant C \sum_{\nu \in E_0(\mu)} \|\psi_\nu(x, hD_x) f\|^2 + C \sum_{2 \leqslant |I| \leqslant r} \sum_{\nu \in E_I(\mu)} \|\psi_\nu(x, hD_x) f\|^2.$$

En utilisant les propositions 5 et 7 pour majorer les sommes du membre de droite, on obtient:

$$h^{2-2/r} \|f\|^2 \leqslant C \sum_{j=1}^{p} \|(a_j(x, hD_x) - \mu_j) f\|^2 + Ch^2 \|f\|^2$$

pour tous $h \in]0, h_0]$, $f \in \mathfrak{S}(R^n)$ et $\mu \in K$. En choisissant h_0 assez petit, on peut supprimer le dernier terme (et changer la constante C), et on en déduit bien (2.4) pour tout $\psi \in \Sigma_h$.

References

[BCN] P. Bolley, J. Camus, et J. Nourrigat, La condition de Hörmander–Kohn pour les opérateurs pseudo-différentiels, *Comm. Partial Differential Equations* 7(2) (1982), 197–221.

[CHa] J. Chazarain, Spectre d'un hamiltonien quantique et mécanique classique, *Partial Differential Equations Comm.* 5(6) (1980), 595–644.

[FP] C. L. FEFFERMAN ET D. H. PHONG, The uncertainty principle and sharp Gärding inequality, *Comm. Pure Appl. Math.* **34**(3) (1981), 285–331.

[GuSt] V. GUILLEMIN ET S. STERNBERG, Geometric asymptotics.

[HeRo1] B. HELFFER ET D. ROBERT, Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques elliptiques, *Ann. Inst. Fourier* **31**(3) (1981), 169–223.

[HeRo2] B. HELFFER ET D. ROBERT, Calcul fonctionnel par la transformation de Mellin et opérateurs admissibles, *J. Funct. Anal.* **53** (1983).

[Hö] L. HÖRMANDER, The Weyl calculus of pseudo-differential operators, *Comm. Pure Appl. Math.* **32** (1979), 359–443.

[No] J. NOURRIGAT, Réduction microlocale des systèmes d'opérateurs pseudo-différentiels, a paraître aux *Ann. Inst. Fourier.*

[Ro] D. ROBERT, Autour de l'approximation semi-classique, Publications de l'Université de Recifé (Brésil) (cours donné en 1983); *Progr. Math.*, n° 68, Birkhäuser.

[Zo] D. ZOMA, Spectre conjoint pour des opérateurs pseudo-différentiels qui commutent, Séminaire d'Analyse de Nantes, 1983–1984.